**Dạng 3: Phân tích thành các tổng không âm**

- Cơ sở của phương pháp này thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn viết được dưới dạng tổng các bình phương

- Biến đổi phương trình về dạng một vế là một tổng bình phương của các biểu thức chứa ẩn, vế còn lại là tổng bình phương của các số nguyên (số số hạng của hai vế là bằng nhau)

Chẳng hạn: , giải các phương trình tương ứng và kết luận nghiệm của phương trình.

**Bài 1:**

Giải phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Ta có 

 (phương trình vô nghiệm)

**Bài 2:**

Giải phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Ta có 



 (có 4 trường hợp)

+ TH1:  (thỏa mãn)

Các trường hợp còn lại tương tự.

**Bài 3:**

Giải phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Phân tích:  không ổn

Dùng 





Ta có phương trình 



Ta xét 6 trường hợp:

+ TH1:  (thỏa mãn)

Các trường hợp còn lại làm tương tự.

**Bài 4:**

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng số đó bằng tổng bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và hai chữ số cuối. Biết rằng hai chữ số cuối giống nhau.

**Lời giải**

Gọi số có bốn chữ số là  (  là các chữ số)

Từ giả thiết  





Vì 

+  (loại)

+  (loại)

**Bài 5:**

Giải phương trình nghiệm nguyên không âm của 

**Lời giải**

Phân tích: 

Phương trình 



Vì 

Vì 

+ Với 

Thay vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn

+ Với 

Nếu  (vô nghiệm)

Nếu  (không thỏa mãn)

+  (thỏa mãn)

Vậy .

**Bài 6:**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình  (1)

**Lời giải**

Ta có 





Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành tổng của hai số chính phương . Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong hai khả năng:

 hoặc 

Giả các hệ trên suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên là



**Bài 7:**

Giải phương trình nghiệm nguyên

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta đưa được về dạng 

b) Đưa được về dạng 

**Bài 8:**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Lời giải**

Ta có 



**Bài 9:**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình 



**Bài 10:**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Lời giải**

Nhân 2 vào cả hai vế của phương trình ta được:



**Bài 11:**

Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình 

**Lời giải**

Ta có 

Xét trường hợp  hoặc  không thỏa mãn, 

Với  thì ta có 2 tổng không âm.

**Bài 12:** Chuyên Sư phạm HN năm học 2007 - 2008

Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa mãn 

**Lời giải**

Cách 1: Ta có 



Cách 2: Nhận xét được 

Cách 3: 

**Bài 13:**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình 



 (\*)

Từ phương trình (\*) ta suy ra  (\*\*)

Do  là các số nguyên dương nên (\*\*) ta suy ra 

Vì nếu  và do  nên , mẫu thuẫn với (\*\*)

Thay  vào (\*) ta có 

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là với .

**Bài 14:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 



Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: .

**Bài 15:** HSG Tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Để ý rằng  có dạng lẻ nên ta có các trường hợp và kết luận được các nghiệm nguyên  thỏa mãn bài toán là: 

**Bài 16:** Chuyên Tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2017 - 2018

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Ta tiến hành xét từng trường hợp rồi kết luận. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là:



**Bài 17:** Chuyên Tỉnh Quảng Nam, năm học 2016 - 2017

Tìm cặp số tự nhiên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



Do đó  và  là hai số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 6 có tổng bình phương là 34. Có 3 số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 6 là: 1, 3, 5

Ta có: , do đó:  hoặc 

Suy ra  hoặc 

**Bài 18:** HSG Nam Định, năm học 2015 - 2016

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Từ đó tìm được các số  cần tìm là: 

**Bài 19:** Chuyên Long An, năm học 2017 - 2018

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Chú ý rằng  có dạng lẻ nên ta có các trường hợp và kết luận nghiệm của phương trình là: 

**Bài 20:** Chuyên Hải Dương, năm học 2017 - 2018

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Vậy nghiệm của phương trình là:



**Bài 21:** Chuyên Đồng Nai, năm học 2017 - 2018

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Giải ra và kết luận được nghiệm của phương trình là: 

**Bài 22:** HSG Bến Tre, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Để ý rằng  có dạng số lẻ

Giải ra và kết luận nghiệm của phương trình là: 

**Bài 23:** HSG Bạc Liêu, năm học 2016 - 2017

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:





Do  đều chia hết cho 8 và  là số chính phương và chia hết cho 8 

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình: 

**Bài 24:** Chuyên Thái Bình, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Cách 1: Ta có:



 là số chính phương nhỏ hơn hoặc bằng 38 và  chẵn từ đó ta có các trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình là: 

Cách 2: Ta có:





Vì 

Mà  là số chính phương với  nguyên nên  phải là số chính phương

Từ 

- Với  (loại)

- Với  (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là: 

**Bài 25:** Chuyên Cà Mau, năm học 2015 - 2016

Tìm các số nguyên dương  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

+) Lập luận để 

Từ 



hay  vì  nguyên dương

- Nếu  (do \*)

Khi đó  (vì  nguyên dương) thì (1) có dạng:

 (vì  nguyên dương)

Suy ra  (vì  nguyên dương)

Vậy 

**Bài 26:** Chuyên Cà Mau, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên dương  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Suy ra  và , vì  nguyên nên  hoặc 

a) 

Với  không có số nguyên  thỏa mãn

Với 

b)  không có số nguyên  thỏa mãn

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên: 

**Bài 27:** HSG Tỉnh Cà Mau, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên dương  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Giải sử có  nguyên thỏa mãn, 

Do 

- TH1:  (vô nghiệm trên )

- TH2:  (vô nghiệm trên )

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 28:** HSG Hoài Nhơn, năm học 2016 - 2017

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 







**Bài 29:** HSG Việt Yên, năm học 2018 - 2019

Tìm số nguyên  biết 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



 (1)

Vì ; 

Nên (1) 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**Bài 30:** HSG Lục Nam, năm học 2018 - 2019

Tìm tất cả các số  nguyên thoả mãn: .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



Phương trình 

Vậy .

**Bài 31:** HSG Quế Võ, năm học 2020 - 2021

Tìm hai số  thỏa mãn: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 





 

Do ;  

Từ và suy ra  và 

**Bài 32:** HSG Thanh Oai, năm học 2020 - 2021

Tìm nghiệm nguyên  của phương trình: 

**Hướng dẫn giải**



Vì  Mà , nên ta có các trường hợp:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Vậy các cặp số nguyên thoả mãn là: 

**Dạng 4: Phương pháp xét số dư**

Phương pháp:

+ Nhắc lại định nghĩa đồng dư: Cho  là các số tự nhiên,  khác  thì 

+ Tính chất:

Nếu 

Nếu 

Nếu 

**Nội dung:** Cho phương trình 

Xét số dư của  và  cho cùng một số

+) Nếu hai số dư khác nhau thì phương trình vô nghiệm

+) Nếu hai số dư bằng nhau thì làm tiếp

\*) Nhận xét: Dạng toán này đa số dùng chứng minh phương trình vô nghiệm bằng cách xét số dư vế

\*) Nhận xét:

Số chính phương khi chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Số chính phương khi chia cho 4 dư 0 hoặc 1

Số chính phương khi chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4

Số chính phương khi chia cho 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4

Số chính phương khi chia cho 9 dư 0 hoặc 1 hoặc 4 hoặc 7

\*) Nhận xét: Số lập phương khi chia cho 9 dư 0, 1 hoặc -1

**Bài 1:**

Giả phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Phân tích: Xét mod3

Ta có 

Nếu 



Vậy khi xét  mâu thuẫn nên không sử dụng được

+ Xét 

Ta có 

 phương trình vô nghiệm.

Lời giải:

Nhận xét: Một số chính phương chia 8 chỉ có số dư là 0, 1, 4





Vậy  phương trình vô nghiệm.

**Bài 2:**

Giải phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Nhận xét: Ta có 

Mà 

Mà 3 là số nguyên tố nên 

Đặt , thay vào ta có 

Tương tự ta có  hay 

Đặt , thay vào ta được: 

Ta có  hay 



Mà 

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 3:** Chuyên KHTN 2011 vòng 1

Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên  thỏa mãn đẳng thức 

**Lời giải**

Phân tích: Xét 

Ta có:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Ta có 



Như vậy vẫn còn số 2 nên không xet được 

Lời giải: Xét  có số dư 0, 1, 4  chia cho 8 có số dư là 0, 1

Từ đó  (1)

Mà  (2)

Từ (1)(2) suy ra phương trình vô nghiệm.

**Bài 4:**

Giải phương trình với nghiệm tự nhiên 

**Lời giải**

Nhận xét: Nếu 

+ TH1: Nếu 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 chia 9 dư 0 hoặc 

 vô lý

+ TH2: Nếu , mà 

Với  (thảo mãn)

Với  (không thỏa mãn)

Vậy .

**Bài 5:**

Giải phương trình với nghiệm tự nhiên 

**Lời giải**

Nhận xét: Vì vào trò của  như nhau nên ta giả sử 

Chi cả 2 vế của phương trình cho  ta được:  (1)

+ TH1: Nếu 

 vô lý



Vậy 

**Bài 6:**

Phương trình  có nghiệm nguyên không, nếu

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Với , ta có phương trình 

Nhận xét: Một số chính phương chia 8 có số dư là 0, 1, 4







 (2)

Từ (1)(2) suy ra phương trình vô nghiệm.

c) Với 



Ta chọn  sao cho 

Chọn 

Chọn 

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm .

**Bài 7:**

Giải phương trình với nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Vì  lẻ 

Từ  chẵn  chẵn

Vì  chẵn và  chẵn nên từ (2) suy ra  lẻ

Nếu  chẵn (vô lý)

, thay vào ta có  vì 

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm 

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: 

**Lời giải**

Ta có: 

Có:  và 

+) Nếu 

Vậy phương trình có nghiệm: 

**Bài 2:**

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) 

Nhận xét:  chia 4 dư 0 hoặc 1 

Mặt khác: 

b) 

Nhận xét: 

Chia cho 5 có cùng số dư nên số dư phải bằng 0



**Bài 3:**

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau: 

**Lời giải**

Ta có:  và  chia 4 dư 1

Phương trình 

**Bài 4:**

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: 

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: 

c) Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

a) Ta có: 



Tương tự: 

Đặt 



Từ đó ta tìm được nghiệm: 

b) Ta có: 

Từ 

Đặt 

Đặt 

Từ đó ta tìm được: 

c) Từ 



+)  loại

+) 

+) 

Vậy 

**Bài 5:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: 

**Lời giải**

Xét số dư của  cho 16

+)  chẵn 

+)  lẻ  chia 16 dư 1

Vậy  phương trình vô nghiệm.

**Bài 6:**

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a)  b) 

**Lời giải**

a) +) Nếu  vô lý

+) Nếu 

Ta có:  các trường hợp

+) 

b. Do  có vai trò như nhau, giả sử 

Có: 

+)  (loại)

+) 

-  lẻ 

-



**Bài 7:**

Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho:  là số chính phương

**Lời giải**

Theo giả thiết: 

+) Nếu  thì  vô lý

+) Nếu  thì 

Ta thấy  các trường hợp

+) TH1:  (loại)

+) TH2: 

+) TH3: 

Vậy 

b)  là số chính phương  (Xét modul 4)

**Bài 8:**

Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Vì  , nên:  ( có thể chẵn )

Mặt khác: 

Từ (1) và (2)  phương trình vô nghiệm.

**Bài 9:**

Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

**Lời giải**

a) Nhận xét: 

Thật vậy, nếu 

Nếu 

Áp dụng: 

Có: 

Từ (1) và (2) suy ra phương trình vô nghiệm

b) Ta có: 

phương trình vô nghiệm

c) Ta có: , a lẻ

Thật vậy: 

vì:  ( và  là hai số chẵn liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 4 và 1 số chia hết cho 2 nên tích của chúng chia hết cho 8)

Áp dụng: 

Ta có:  phương trình vô nghiệm

d) Có  phương trình vô nghiệm

e) Ta có: 

Lại có:  phương trình vô nghiệm

f) Ta có: 

mà:  lẻ

Đặt 

 phương trình vô nghiệm.

**Bài 10:** HSG Tỉnh Tuyên Quang, năm học 2015 - 2016

Xác định tất cả các cặp nguyên dương  thỏa mãn phương trình sau: 

**Lời giải**

Từ 

Nếu  không chia hết cho 3 thì  khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 2, 4 hoặc 7, trong khi đó  khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0, 1 hoặc 6 nên không thể có đồng dư thức . Vậy  với  là số nguyên dương

Thay vào phương trình đã cho ta được: 



Từ  là ước của 3367.

Hơn nữa  nên 

Xét , thay vào (1) suy ra  (vô nghiệm)

Xét , thay vào (1) suy ra  (vô nghiệm)

Xét , thay vào (1) suy ra  (vô nghiệm)

Từ đó ta có  và . Vậy 

**Bài 11:** Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa vòng 2, năm học 2017 - 2018

Tìm tất cả các cặp nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có:  và  nên 

Đặt  khi đó phương trình trở thành: 

Vì  hay 

Đặt  thì phương trình đã cho trở thành 

Suy luận tương tự ta cũng đặt  và , ta được: 

Đặt  và , ta được: 

- Nếu  thì phương trình đã cho vô nghiệm

- Nếu  thì  và 

Vậy 

**Bài 12:** Olympic Mỹ Đức, năm học 2018 - 2019

Tìm các cặp số tự nhiên  thoả mãn 

**Lời giải**

Ta có:  (\*)

Vì 305 là số lẻ nên  và  đều là số lẻ.

Lại có 

Vì 

Nên để  thì  (thoả mãn)

Khi đó, phương trình (\*) trở thành:  (1)

Ư(305) 

Mà  và  chia 15 dư 1

 (thoả mãn)

Với , thay vào (1) suy ra  (vô lí)

Với , thay vào (1) ta được  (đúng)  thoả mãn

Vậy .

**Bài 13:**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Ta có: 



Bài này không xét mod 4 được, cũng không xét mod 5 được: Vì hai vế có cùng số dư

**Bài 14:**

Phương trình  có nghiệm nguyên không nếu 

**Lời giải**

Ta có: 

mà: 

**Bài 15:**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Ta có: 

 ().

Từ (1) 

Có: 

**Bài 16:**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Ta có: 





Nhận xét: 

**Bài 17:**

Giải các phương trình nghiệm nguyên

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a. 

+) 

Nếu 

b. Giả sử , chia cả hai vế cho 

+) Nếu 

+) Nếu 

c. Nếu 

+) Nếu 

- x: chẵn 

- x: lẻ 

Vậy 

d. Nếu  đúng với mọi 

Vậy x = 1, y = n ( n là số số tự nhiên bất kỳ )

+) Nếu 

+) Nếu 